

УДК 534.26

## О ВОЗМОЖНОМ МЕХАНИЗМЕ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ

© 2005 г. А. А. Абрашкин, В. С. Авербах, С. Н. Власов, Ю. М. Заславский, И. А. Соустова, Р. А. Судариков, Ю. И. Троицкая

*Институт прикладной физики РАН  
603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 46*

*E-mail: abrash@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 16.08.04 г.

Исследовано движение жидкой капли под действием акустической вибрации в двух предельных случаях: для достаточно высоких частот, когда действием вязких сил можно пренебречь, и для более низких частот, когда вязкость существенна. Получены уравнения, описывающие движение капли в аксиально симметричном капилляре переменного сечения с учетом эффекта гистерезиса краевого угла. Проведены численные расчеты для цилиндрического, конического и гофрированного капилляров.

В последние годы отмечен новый всплеск интереса к проблеме виброволнового воздействия на пористые среды. Это связано, в первую очередь, с решением задачи увеличения проницаемости нефти через геологические пласты. К настоящему времени достаточно подробно выяснены физические основы виброволнового воздействия на пористые среды. Существует ряд монографий на эту тему (например, [1–4]) и очень содержательный обзор [5]. Вместе с тем вопрос о конкретных физических механизмах, приводящих к изменению проницаемости среды, их роли и относительной эффективности еще весьма далек от разрешения, а в случае низкочастотного воздействия еще и во многом неясен.

В работе [6] дана оценка эффективности известных физических механизмов, приводящих к росту проницаемости нефтяного пласта при воздействии на него акустических полей с частотой 5–50 кГц. Среди них стоит указать такие, как изменение вязкости свободной нефти, акустические течения в поровых каналах и возбуждение волн Био второго рода [7, 8], приводящих к движению флюида относительно скелета породы. Все они, вообще говоря, проявляются тем сильнее, чем больше амплитуда и выше частота акустического воздействия. Ультразвуковые волны, однако, сильно затухают в среде и область воздействия ими на среду крайне ограничена.

Низкочастотные акустические волны (от нескольких десятков Гц до единиц кГц) затухают значительно слабее. Начиная с 60-х годов на нефтяных месторождениях стали применять воздействие низкочастотными упругими колебаниями на призабойную зону пласта с помощью спускаемых в скважины различных излучателей [2]. К настоящему времени накоплен значительный

экспериментальный материал, свидетельствующий о существовании эффекта увеличения проницаемости нефтесодержащего пласта под действием акустических волн (смотри работы [1–4, 9–12]), а также материалы совещания “Воздействие упругими колебаниями на протекание жидкости в пористых средах” в рамках конференции [13]). Но вопрос о возможных физических механизмах, способствующих проявлению этого эффекта в низкочастотном диапазоне, до сих пор остается открытым.

Характер движения жидкости внутри трещины зависит от частоты вибрации ее стенок. В пределе низких частот толщина проникновения колебаний внутрь жидкости (жидкого “скин слоя”), как правило, существенно превышает характерную толщину трещин. При этом жидкость движется вместе с поверхностью трещин как единое целое, и массопереноса жидкой фазы внутри твердотельной матрицы наблюдаться не будет. В связи с этим задача объяснения наблюдаемого в экспериментах роста проницаемости среды при низкочастотном вибровоздействии становится весьма нетривиальной. В качестве одного из ее решений была предложена теория доминантных частот [14–16]. Она основана на предположении, что низкочастотная сейсмическая волна может эффективно порождать ультразвуковые колебания в среде. Для этого, однако, приходится предположить, что между напряжениями и деформациями геосреды существует соотношение очень частного (довольно необычного и трудно обосновываемого) вида, что весьма сужает круг физических ситуаций, где возможна реализация данного механизма.

В настоящей работе изучается другой возможный механизм увеличения проницаемости. Он мо-

жет реализовываться только в частично насыщенной пористой среде. Как известно, при добыче нефти основным методом является вытеснение ее из пористого коллектора водой, подаваемой под давлением через запитывающие скважины. При этом возникает ряд нежелательных эффектов, приводящих к снижению дебита добывающей скважины. К ним, в частности, относится образование на стенках пор водяных пленок, а в местах сужения пор – защемленных капель воды. Водяные пленки уменьшают эффективные радиусы капилляров для протекания нефти, а защемленные капли могут полностью блокировать ее продвижение по капиллярам. Процесс освобождения внутриводяного пространства от водяных пленок и отдельных капель можно назвать “водяной декольматацией”. Ранее уже рассматривались механизмы разрушения под действием вибрации субмикронных водяных пленок и систематического испарения “защемленных капель” [17]. Ниже детально исследуется механизм движения отдельных капель в капиллярах различной формы под действием акустических колебаний.

Эффект движения “защемленных” капель в капилляре под действием вибрации впервые исследовался в [18]. Суть его состоит в следующем. Предположим, что одиночная капля находится в поле некоторой статической силы (это может быть, например, сила градиента давления или сила тяжести), которая, однако, не превышает силы трения покоя. Вследствие этого капля остается неподвижной. Пусть теперь на заданное статическое поле накладывается переменное низкочастотное акустическое поле. В силу существования гистерезиса краевого угла для движущегося мениска [19–21] зависимость величины угла от модуля скорости имеет неоднозначный (гистерезисный) характер. Капиллярные силы, действующие на наступающий и отступающий мениски капли, будут неодинаковы. В результате первоначально покоившаяся капля начнет двигаться в направлении действия статической силы. Вибрация, таким образом, как бы снижает трение покоя [22]. Эффект движения капель под действием вибрации наблюдался экспериментально для случаев капельки глицерина [23], капельки 50% водного раствора глицерина и капельки воды [24].

Постановка задач гидродинамики при смачивании твердых тел, когда мениск (линия контакта трех фаз) движется по твердой поверхности, осложнена сингулярностью напряжений на этой линии [25]. Динамический краевой угол смачивания определяется структурой течения со свободной поверхностью в малой окрестности движущейся контактной линии. Определение зависимости его величины от скорости движения мениска в каждом случае представляет отдельную, достаточно сложную задачу [26]. Мы будем считать ее известной и для простоты полагать, что величина кра-

евого угла зависит только от направления движения, но не от скорости. То есть при смене направления движения значение угла меняется скачком с одной постоянной на другую.

Важным фактором, определяющим движение капли по капилляру при вибровоздействии, является вязкость жидкости. В том случае, когда частота колебаний достаточно велика и глубина проникновения колебаний в жидкость мала по сравнению с радиусом капилляра, действием вязких сил можно пренебречь. Капля будет двигаться подобно твердой частице, на которую действуют статическая, осциллирующая и капиллярная силы. Анализ ее движения можно провести в рамках рассмотрения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной гистерезисной силой. Если же толщина скин-слоя сравнима или порядка толщины капилляра, то принципиален учет вязкости жидкости. Движение капли при этом следует изучать в рамках уравнений гидродинамики. В стоксовом приближении движение капли описывается дифференциальным уравнением первого порядка. В работе дано теоретическое описание обеих ситуаций: как в пренебрежении, так и с учетом вязких эффектов. Указаны необходимые условия дрейфа капли при наличии вибрации. Приведены аналитические решения для частных режимов движения капли. Проведено численное исследование движения капли внутри цилиндрического, конического и гофрированного капилляров.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим каплю в аксиально-симметричном капилляре переменного сечения с радиусом  $r = R(z)$ ,  $z$  – координата вдоль оси капилляра. Пусть его стенки совершают гармонические колебания в направлении оси  $z$  по закону

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

В силу симметрии задачи скорость жидкости  $\vec{v}$  и давление  $p$  не зависят от полярного угла. Будем считать жидкость несжимаемой.

Движение жидкости удобно рассматривать в неинерциальной системе отсчета, в которой стенки канала покоятся. В цилиндрической системе координат система уравнений гидродинамики имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \ddot{\xi} + G.$$

Здесь  $G$  – внешняя постоянная сила. Ее роль может играть, например, сила тяжести в случае вертикального расположения капилляра.

Граничные условия к системе (2), (3) включают в себя условия непротекания и прилипания на стенки капилляра

$$v_r|_{r=R(z)} = 0; \quad v_z|_{r=R(z)} = 0. \quad (4)$$

На свободных поверхностях  $\Sigma_{1,2}$  выполняются условия для скачка нормальных напряжений

$$p_n|_{\Sigma_{1,2}} = \frac{2\sigma}{R'(\Sigma_{1,2})} + P_{1,2}; \quad R'(\Sigma_{1,2}) = \frac{R(z_{1,2})}{\cos\theta_{1,2}}, \quad (5)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $R'(\Sigma_{1,2})$  – радиус кривизны мениска капли,  $P_{1,2}$  – величины давлений по разные стороны мениска,  $z_1$  и  $z_2$  – координаты левого и правого концов капли,  $\theta, \theta_2$  – краевые (контактные) углы смачивания для левого и правого менисков [20].

Для движущейся капли величина угла смачивания у наступающего и отступающего менисков, вообще говоря, различны. На рис. 1 в качестве примера приведен результат экспериментального исследования гистерезиса наступающего  $\theta_+$  и отступающего  $\theta_-$  угла в случае неполного смачивания для системы вода–твердый парафин [19]. Как видно, краевые углы зависят от скорости движения мениска относительно стенки. Эта кривая имеет участок неоднозначности при нулевой скорости движения мениска  $V = 0$  (так называемый гистерезис краевого угла). В случае  $V \neq 0$  краевой угол, однако, уже однозначно связан со скоростью движения и выходит при некотором значении скорости на постоянные значения  $\theta_+^*$  для наступающего и  $\theta_-^*$  для отступающего менисков. Величины  $\theta_+^*$  и  $\theta_-^*$  определяются как знаком, так и величиной скорости смещения мениска. Но мы для простоты будем считать, что краевой угол быстро достигает своего предельного значения (эта идеализация соответствует Z-характеристике кривой гистерезиса). Выражения для  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяются следующим образом:

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_+^* + 1(V_1)(\cos\theta_-^* - \cos\theta_+^*) \quad (6)$$

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_-^* + 1(V_2)(\cos\theta_+^* - \cos\theta_-^*),$$

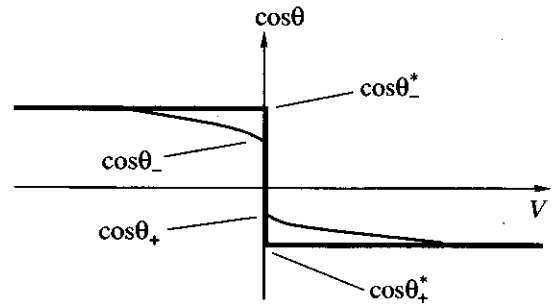


Рис. 1. Кривая гистерезиса контактного угла.

$\theta_+^*$  и  $\theta_-^*$  – эмпирические константы, а  $V_1, V_2$  – скорости менисков.

Масса капли  $m$  равна

$$m = \rho \int_{z_1}^{z_2} \pi R^2(z) dz. \quad (7)$$

Для целей исследования также удобно представить уравнение неразрывности (2) в интегральной форме. Интегрируя (2) по  $r$  от центра капилляра до стенки капилляра с учетом граничных условий (4), получим следующее равенство:

$$Q(t) = 2\pi\rho \int_0^{R(z)} r v_z dr. \quad (8)$$

Здесь величина потока  $Q(t)$  играет роль вспомогательной функции.

Предположим, что характерный продольный масштаб капли  $L$  существенно превышает поперечный  $R_0$  (характерную толщину капилляра):  $L \gg R_0$ . В этом случае движение жидкости в капле можно считать квазипараллельным (за исключением малых областей порядка толщины капилляра вблизи краев капли). Из первого уравнения системы (3), следует, что с точностью до величин порядка  $R_0/L$  давление не зависит от  $r$ . С учетом всех сделанных выше предположений система (3) сводится к одному уравнению для продольной скорости

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$= v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \ddot{\xi} + G. \quad (9)$$

Вместе с уравнением непрерывности (8) и граничными условиями (4)–(6) оно образует систему уравнений, которая и будет решаться в дальнейшем.

В задаче есть два характерных временных масштаба: время диффузии завихренности на масштаб порядка характерного радиуса капилляра

$R_0$ , определяемого как  $\tau_d = R_0^2/\nu$  и период колебаний стенок канала  $T = 2\pi/\omega$ . Задача может быть упрощена в двух предельных случаях: высокочастотных колебаний, когда  $\epsilon = \tau_d/T = R_0^2\omega/\nu \gg 1$  и низкочастотных колебаний, когда  $\epsilon = \tau_d/T \ll 1$ . Первое из этих неравенств описывает случай тонкого по сравнению с толщиной капилляра "скин-слоя", а второе – широкого.

### ДВИЖЕНИЕ КАПЕЛЬ В СЛУЧАЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть  $\epsilon \gg 1$ . Будем решать задачу без учета вязкости. В этом случае существует решение уравнений гидродинамики, в котором  $v_z$  не зависит от  $r$ . Уравнения (8) и (9) упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\ddot{\xi} + G \quad (10)$$

$$Q(t) = \pi \rho v_z R^2(z). \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнение (10) по  $z$  в пределах капли, принимая во внимание (5) и (11). В результате получим

$$\frac{1}{\pi \rho} \frac{dQ}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{R^2(z')} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(\pi \rho)^2} \left( \frac{1}{R^4(z_2)} - \frac{1}{R^4(z_1)} \right) + \frac{2\sigma}{\rho} \left( \frac{\cos \theta_2}{R(z_2)} - \frac{\cos \theta_1}{R(z_1)} \right) = (G - \ddot{\xi})(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\rho}. \quad (12)$$

Примем во внимание, что по определению

$$v_z|_{z=z_{1,2}} = \frac{dz_{1,2}}{dt},$$

тогда с учетом (11) имеем:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q(t)}{\pi \rho R^2(z_1)}; \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{Q(t)}{\pi \rho R^2(z_2)} \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) образуют замкнутую систему трех уравнений с тремя неизвестными  $z_1$ ,  $z_2$  и  $Q$ . Если длина капли  $l = z_2 - z_1$  мала по сравнению с характерным масштабом изменения радиуса капилляра (короткая капля), то эта система сводится к одному уравнению. Действительно, обозначим через  $z = (z_1 + z_2)/2$ , тогда

$$R(z_{1,2}) = R(z) \mp \frac{dR}{dz} l/2 + \dots$$

и после преобразований получим:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2\sigma}{R(z)\rho l} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + \frac{\sigma}{2\rho} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{R(z)} \right) = G - \ddot{\xi} + \frac{P_2 - P_1}{\rho l}. \quad (14)$$

Для  $\theta_1$  и  $\theta_2$  будем использовать выражение (6), где  $v_1 = v_2 = dz/dt$ . Условие сохранения массы капли примет вид

$$\pi \rho R^2(z) l(z) = m,$$

а уравнение (14) запишется так:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2\pi}{m} \sigma R(z) (\cos \theta_+^* - \cos \theta_-^*) \text{sign} \left( \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\sigma}{2\rho} (\cos \theta_+^* + \cos \theta_-^*) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{R(z)} \right) = G - \ddot{\xi} + \frac{P_2 - P_1}{\rho l}. \quad (15)$$

Введем безразмерные величины смещения капли, времени и радиуса капилляра

$$\eta = \frac{z}{R_0}; \quad \tau = \omega t; \quad \hat{R}(\eta) = \frac{R(z)}{R_0}, \quad (16)$$

В новых переменных уравнение (15) имеет вид:

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + b \hat{R}(\eta) \text{sign} \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right) + \gamma \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\hat{R}(\eta)} \right) = g + a \cos \tau. \quad (17)$$

Входящие в него параметры определяются следующими равенствами

$$a = \frac{\xi_0}{R_0}; \quad b = \frac{2\pi\sigma}{m\omega^2} (\cos \theta_+^* - \cos \theta_-^*); \quad \gamma = \frac{\sigma}{2R_0^3\rho\omega^2} (\cos \theta_+^* + \cos \theta_-^*); \quad (18)$$

$$g = \frac{G}{\omega^2 R_0} + \frac{P_2 - P_1}{\rho l \omega^2 R_0}.$$

Параметр  $a$  определяет интенсивность вибрационного воздействия на капилляр,  $b$  и  $\gamma$  – величину капиллярной,  $g$  – статической (гравитационной) силы.

Перейдем теперь к рассмотрению движения капель в капиллярах с сечением различной формы. В зависимости от частоты вибрационного воздействия в капилляре будет реализовываться либо невязкий режим, когда смещение капли описывается в рамках уравнения второго порядка (17), либо вязкий (его анализ будет поведен ниже). Граница режимов определяется величиной  $\epsilon$ . Сделаем оценки для параметров капилляров и флюида,

типичных для нефтяных пластов. К примеру, для значения радиуса сечения капилляра  $R_0 = 10^{-3}$  см пороговая частота будет  $f_0 = \frac{v}{2\pi R_0^2} \sim 10^3$  Гц (кинема-

тическая вязкость флюида  $\nu = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с). Невязкое приближение для такого капилляра для частот вибраций много больше 1 кГц, т.е. для высокочастотного звука и ультразвука, а “стоково” приближение при  $f \ll 10^3$  Гц, т.е. для низкочастотного.

*Цилиндрический капилляр  
(невязкое приближение)*

Предположим, что радиус капилляра  $R(z) = r_0$  не зависит от  $z$ . Тогда в уравнениях (17)  $\hat{R} = 1$ , и оно принимает вид:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + b \operatorname{sign}\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right) = g + a \cos\tau. \quad (19)$$

Рассмотрим вначале простейший случай, когда  $g = 0$ . Уравнение (19) переписывается так:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = a \cos\tau - b \operatorname{sign}\frac{d\eta}{d\tau},$$

Последний член в правой части этого выражения представляет, по существу, силу трения по кою. Хотя эта сила действует только тогда, когда капля движется, для того, чтобы она сдвинулась с места, амплитуда вибрационного воздействия должна превысить  $b$ . Принимая во внимание выражение для  $a$  и  $b$ , легко получить условие на пороговую амплитуду вибрации

$$\xi_0 > \frac{\sigma(\cos\theta_+^* - \cos\theta_-^*)}{\rho l R_0 \omega^2}. \quad (20)$$

Очевидно, что для высокочастотных колебаний требуются существенно меньшие амплитуды вибраций, необходимых для смещения капли, чем для низкочастотных. При достаточно интенсивной вибрации ( $a > b$ ) капля на протяжении одного периода воздействия вначале неподвижна, потом сдвигается в одну сторону, останавливается на некоторое время в крайнем положении, а затем возвращается к своему исходному положению. В целом ясно, что в отсутствие статической силы вибрация не вызовет систематического смещения капли.

При наличии средней внешней силы, действующей на каплю ( $g \neq 0$ ), условие начала смещения капли будет более мягким:

$$|g| + |a| > |b|.$$

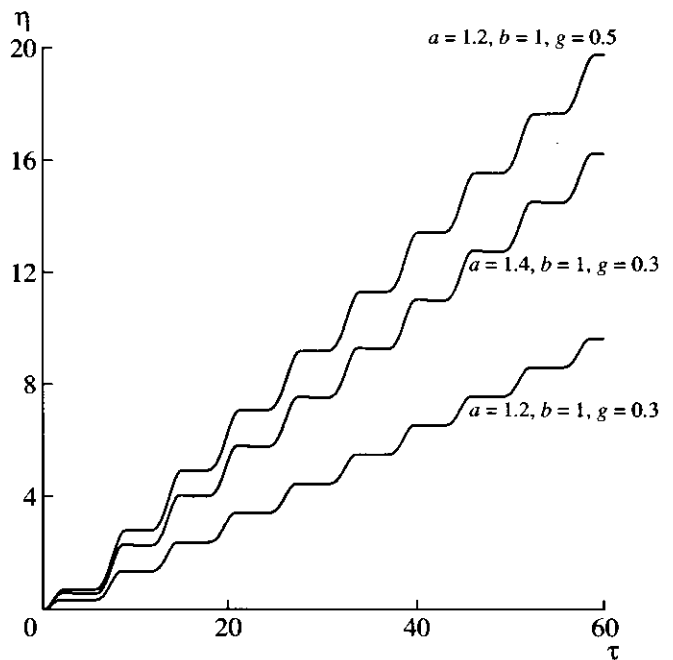


Рис. 2. Зависимость смещения капли от времени в цилиндрическом капилляре.

Оно может быть переписано в виде:

$$\xi_0 > \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\sigma}{\rho l R} (\cos\theta_+^* - \cos\theta_-^*) - G - \frac{P_2 - P_1}{\rho l} \right). \quad (21)$$

Можно предположить, что движение флюида в нефтяных пластах прекращается, когда внешнее давление в капиллярах уравнивается капиллярным давлением, т.е. правая часть (21) близка к нулю. В этих условиях для начала смещения капель даже на низких частотах требуется небольшая амплитуда вибраций. В силу того, что низкочастотный звук является слабозатухающим, можно ожидать увеличения проницаемости пластов, обусловленного началом смещения капель на больших расстояниях (в сотни метров) от источника низкочастотных акустических колебаний.

На рис. 2 приведены графики смещения капли со временем для разных троек значений параметров  $a, b, g$ . Из них видно, что при прочих равных условиях смещение капли тем больше, чем больше амплитуда вибровоздействия (сравни нижний и средний графики) или величина статической силы (средний и верхний графики).

В случае  $g = b$  можно легко найти решение уравнений движения капли в цилиндрическом капилляре (19). Оно имеет вид:

$$\eta = a(\tau - \sin\tau).$$

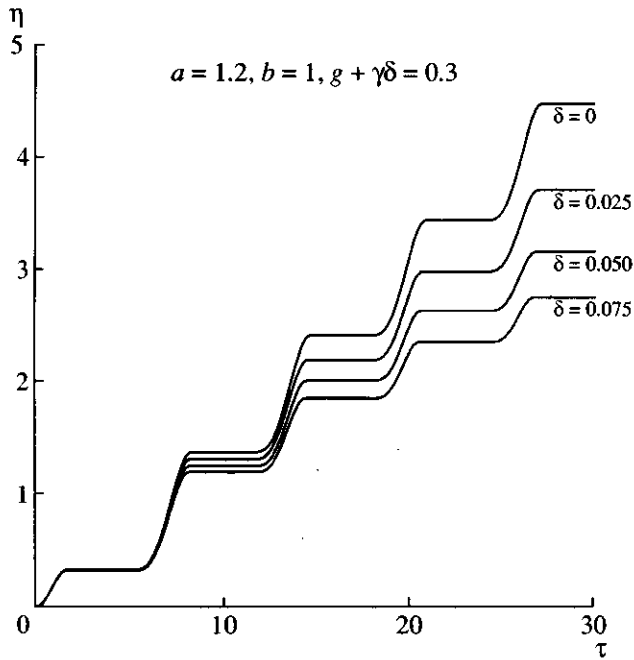


Рис. 3. Зависимость смещения капли от времени в коническом капилляре (статическая сила направлена к вершине).

При этом средняя скорость смещения капли

$$\langle v \rangle = R_0 \omega \left\langle \frac{d\eta}{d\tau} \right\rangle = \xi_0 \omega. \quad (22)$$

Проанализируем, как безразмерные параметры  $a$ ,  $b$  и  $g$  зависят от длины капли  $l$ . Как видно из (18), величина  $a$  не зависит от  $l$ , тогда как  $b$  обратно пропорционально  $l$ . Если теперь предположить, что статическая сила  $G$  — это ненулевая проекция силы тяжести, а  $P_1 = P_2$ , то величина  $g$ , как и  $a$ , не будет зависеть от  $l$ . Таким образом, от длины капли будет зависеть только параметр  $b$ , определяющий при заданном  $a$  начало движения капли. Но это означает, что длинные капли при том же уровне вибровоздействия будут начинать движение раньше, а останавливаться позже. А поскольку параметр  $g$  для разных капель будет одинаков, то, следовательно, и средняя скорость более длинных капель будет больше. В работе [27] изучался эффект слияния двух разных капель под действием вибрации.

#### Конический капилляр

Рассмотрим конический капилляр. В этом случае

$$\hat{R} = 1 + \delta\eta,$$

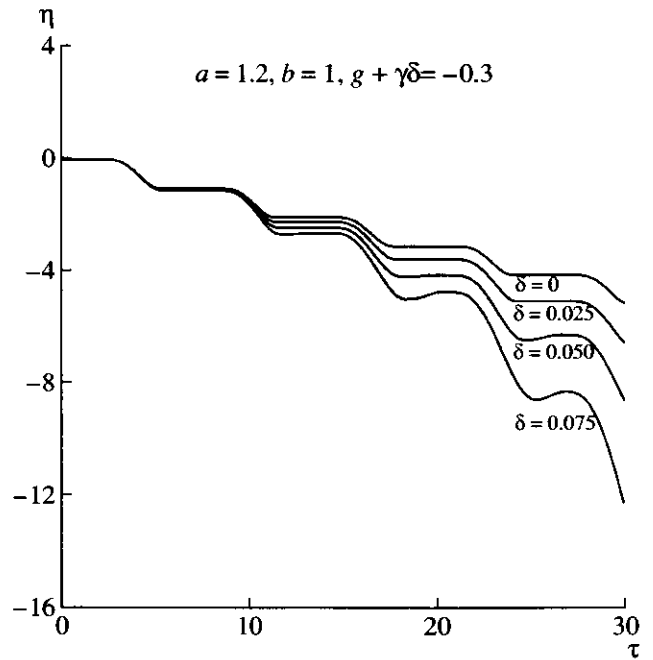


Рис. 4. Зависимость смещения капли от времени в коническом капилляре (статическая сила действует от вершины).

где  $\delta = \operatorname{tg} 2\alpha$ , где  $\alpha$  — угол раскрытия конуса. Будем считать, что  $\delta \ll 1$ . В этом случае уравнение (17) примет вид:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + b(1 + \delta\eta) \operatorname{sign}\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right) = g + \gamma\delta + a \cos\tau. \quad (23)$$

Видно, что наличие “конусности” приводит к появлению дополнительной к  $g$  средней силы, направленной которой определяется знаком угла раскрытия конуса  $\alpha$ . Она может как усиливать, так и ослаблять влияние среднего градиента давления. В реальных условиях можно ожидать, что наличие конусности капилляров будет снижать порог амплитуд вибрационных колебаний, необходимых для начала заполнения тех капилляров, в которых дополнительная сила складывается с градиентом внешнего давления.

На рис. 3, 4 представлены графики численного исследования зависимости величины смещения капли в коническом капилляре при разных значениях параметра конусности  $\delta$ . Значения величин  $a$ ,  $b$  оставались неизменными, а для величины статической силы выбирались два значения 0.3 (рис. 3) и  $-0.3$  (рис. 4). Это соответствует направлению действия силы соответственно вдоль оси от вершины конуса и к вершине. В первом случае капля тем быстрее “выбирается” из более узкой области, чем меньше параметр конусности. Во втором случае капля тем быстрее приближается к вершине, чем больше параметр конусности.

*Капилляр с периодически меняющимся радиусом*

Можно предположить, что в реальных условиях радиус сечения капилляра будет немонотонно зависеть от продольной координаты. Рассмотрим, какие при этом возникают эффекты. В качестве модели рассмотрим капилляр, радиус которого меняется по гармоническому закону

$$\hat{R} = 1 + \alpha \sin kz. \quad (24)$$

Будем считать, что длина волны  $\frac{2\pi}{k} \gg R_0$ , т.е. радиус капилляра меняется плавно. Уравнение (17) для такого капилляра имеет вид:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + b(1 + \alpha \sin \mu\eta) \operatorname{sign} \frac{d\eta}{d\tau} - \frac{\gamma\mu\alpha \cos \mu\eta}{(1 + \alpha \sin \mu\eta)^2} = g + a \cos \tau. \quad (25)$$

Можно ожидать, что в отсутствие внешнего воздействия капли будут стремиться занять положение, соответствующее устойчивым состояниям равновесия. Для капилляра с переменным сечением вида (24) эти положения соответствуют условию

$$kz = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

В случае, когда внешний постоянный градиент давления  $g$  отличен от нуля, капля будет оставаться в этом положении до тех пор, пока

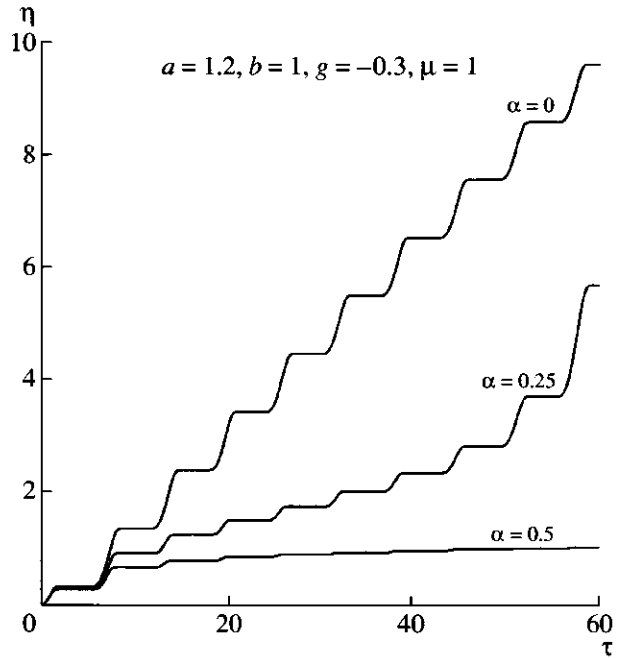
$$g < b(1 + \alpha),$$

т.е.  $g = b(1 + \alpha)$  соответствует пороговому значению для начала движения. Если наложить вибрацию, то капля при этом придет в движение.

На рис. 5 приведен график зависимости смещения капли от времени в капилляре с “синусоидальными” стенками при разном значении параметра гофрированности. Из рисунка видно, что по мере увеличения этого параметра продвижение капли в направлении статической силы все менее и менее эффективно (начальное положение капли соответствует значению  $z = 0$ ). В случае  $\alpha = 0.5$  капля с некоторого момента уже практически перестает продвигаться.

**ДВИЖЕНИЕ КАПЕЛЬ В СЛУЧАЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Рассмотрим теперь случай, когда частота вибраций достаточно низкая, так что время диффузии завихренности на масштабе порядка характерного радиуса капилляра много меньше периода вибраций, т.е. параметр  $\epsilon = \frac{R_0^2 \omega}{\nu} \ll 1$ . Это условие означает малость числа Рейнольдса для изучаемого течения.



**Рис. 5.** Зависимость смещения капли от времени для капилляра синусоидальной границы.

Будем искать решение в виде разложения в ряд по малому параметру  $\epsilon$ :

$$v_z = v_0 + v_1 + \dots$$

$$p = p_0 + p_1 + \dots$$

причем  $v_1/v_0 \sim \epsilon, p_1/p_0 \sim \epsilon$ .

*Уравнение безынерционного приближения*

В нулевом порядке по  $\epsilon$  уравнение (9) примет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} = v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_0)}{\partial r} \right) - \xi + G.$$

Его интегрирование с учетом граничного условия (4) даст выражение для скорости жидкости:

$$v_0 = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\partial p_0}{\partial z} + \rho(\xi - G) \right) (r^2 - R^2)$$

Подставляя это выражение в (8), определим связь величины потока жидкости с градиентом давления:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = - \frac{8\nu Q_0}{\pi R^4} - \rho(\xi - G). \quad (26)$$

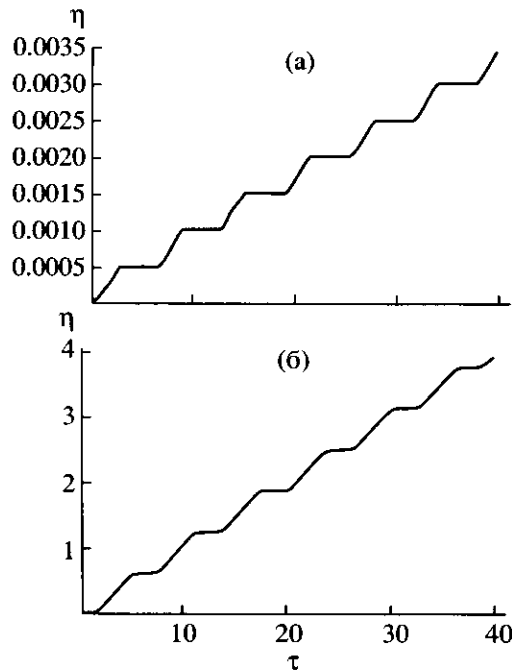


Рис. 6. Зависимость координаты капли от времени в цилиндрическом капилляре при следующих значениях параметров флюида и размеров капилляров:  $\xi_0 = 10^{-4}$  см;  $\omega = 10^2$  с $^{-1}$ ;  $R_0 = 10^{-3}$  см;  $l = 10^{-1}$  см;  $\sigma/\rho = 74$  см $^3$ /с $^2$ ;  $v = 10^{-2}$  см $^2$ /с;  $b = g$ ; (а) – вязкая модель, (б) – невязкая модель.

Здесь  $Q_0$  – поток массы в нулевом порядке по  $\varepsilon$ . Далее, проинтегрируем (26) по  $z$  с учетом динамического граничного условия (5). В итоге получим:

$$-2\sigma \left( \frac{\cos \theta_2}{R(z_2)} - \frac{\cos \theta_1}{R(z_1)} \right) = \frac{4vQ_0(t)}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{R^4(z)} + \rho \left( (\xi - G)(z_2 - z_1) - \frac{P_2 - P_1}{\rho} \right). \quad (27)$$

Это уравнение соответствует (12)

Поскольку поперечный размер капли существенно меньше продольного, то скорости перемещения концов капли можно определить как среднюю скорость в соответствующем сечении:

$$\frac{1}{S} \int_0^s v_0 ds = \frac{Q(t)}{\pi \rho R^2(z)}.$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения положения концов капли:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q_0(t)}{\pi R^2(z_1)}; \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{Q_0(t)}{\pi R^2(z_2)} \quad (28)$$

Система (27), (28) аналогична системе (13), (14), полученной в отсутствие вязкости.

Аналогично (14), в приближении короткой капли из (27), (28) можно получить одно уравнение для определения координат центра массы капли. Оно записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & \frac{\pi \sigma}{2v m} R^3(z) (\cos \theta_+^* - \cos \theta_-^*) \operatorname{sign} \left( \frac{dz}{dt} \right) + \\ & + \frac{\sigma R^2(z)}{4v \rho} (\cos \theta_+^* + \cos \theta_-^*) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{R(z)} \right) + \\ & + \frac{1}{4v} R^2(z) \left( \xi - G - \frac{P_2 - P_1}{\rho l} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

В отличие от (14) полученное уравнение имеет первый порядок. Это является отражением того, что в стоковом приближении сила инерции, действующая в неинерционной системе отсчета, уравновешивается вязкой силой, которая пропорциональна скорости капли.

Перейдем к безразмерным переменным (16), тогда уравнение (29) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} = & b \hat{R}^3(\eta) \operatorname{sign} \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right) + \gamma \hat{R}^2(\eta) \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\hat{R}(\eta)} \right) - \\ & - a \hat{R}^2(\eta) \cos \tau - g \hat{R}^2(\eta), \end{aligned} \quad (30)$$

$$b = \frac{\pi \sigma}{2v m \omega} R_0^2 (\cos \theta_+^* - \cos \theta_-^*),$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{4v \rho \omega R_0} (\cos \theta_+^* + \cos \theta_-^*);$$

$$a = R_0 \omega \sigma / 4v; \quad g = \frac{R_0}{4v \omega} \left( G + \frac{P_2 - P_1}{\rho} \right).$$

*Цилиндрический капилляр (вязкое приближение)*

Для цилиндрического капилляра выражение (30) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\tau} = b \operatorname{sign} \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right) - g - a \cos \tau. \quad (31)$$

Рассмотрим вначале опять простейший случай, когда  $g = 0$ . Для того, чтобы произошло смещение капли ( $dv/d\tau$  стало отлично от нуля) нормированная амплитуда вибрации  $a$  должна превысить  $b$ , что приводит к необходимости выполнения условия (20), требующего для высокочастотных колебаний существенно меньших амплитуд вибраций, чем для низкочастотных. При наличии внешней силы, действующей на каплю ( $g \neq 0$ ), условие начала смещения капли будет более мягким (21).

Для оценки средних скоростей смещения капли в капилляре выполним численное решение уравнений (19) и (31) при следующим значениях



параметров:  $\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$ ;  $R_0 = 10^{-3} \text{ см}$ ;  $v = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ;  $\sigma/\rho = 74 \text{ см}^2/\text{с}^2$ ;  $l = 10^{-1} \text{ см}$ ;  $\xi_0 = 10^{-4} \text{ см}$ .

Будем предполагать, что  $G + \frac{P_2 - P_1}{\rho R} = \frac{\sigma}{\rho l R} (\cos \theta_+^* - \cos \theta_-^*)$ , т.е.  $b = g$ . Сравним результаты расчетов движения капли в цилиндрическом капилляре вблизи порога смещения в рамках невязкой и вязкой моделей. Они показаны на рис. 6а и 6б соответственно.

Видно, что характер движения капель в рамках обеих моделей для данных параметров качественно одинаков. В то же время имеются существенные количественные различия. Из рис. 6а видно, что средняя скорость смещения капли составляет  $10^{-2} \text{ см/с}$ . В рамках “стоксовой” модели средняя скорость составляет примерно  $10^{-4} \text{ см}$ . Таким образом, вязкость существенно понижает среднюю скорость движения капли. В то же время невязкая модель позволяет проанализировать все основные особенности поведения капли в вибрирующем капилляре.

В случае  $g = b$  можно легко найти решение уравнений движения капли в цилиндрическом капилляре

В “стоксовом” приближении уравнение (31) можно переписать в виде:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = a \begin{cases} \sin \tau & \text{при } \sin \tau > 0 \\ 0 & \text{при } \sin \tau < 0. \end{cases}$$

Отсюда средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{a}{\pi} R_0 \omega = \frac{R_0^2 \omega^2 \xi_0}{4\pi v}. \quad (32)$$

Пусть теперь внешняя сила не компенсируется силой “сухого” трения, т.е.  $g \neq b$ . Будем считать, что внешняя сила достаточно велика, так что всегда соблюдается условие  $g > a$  (это соответствует достаточно малой амплитуде акустических колебаний). В этом случае уравнение (32) можно переписать в виде:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \begin{cases} 0, & \text{если } b - g \geq a \\ \left\{ \begin{array}{l} a \sin \tau - (b - g) \arcsin \frac{b - g}{a} < \tau < \pi - \\ - \arcsin \frac{b - g}{a} \end{array} \right\}, \\ 0, & \text{при } \tau \text{ вне интервала, если } |b - g| < a \\ a \sin \tau - (b - g) & \text{при } b - g \leq -a \end{cases} \quad (33)$$

Усредняя (33) по периоду колебаний, легко получить выражение для средней скорости движения капли:

$$\left\langle \frac{d\eta}{d\tau} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } b - g \geq a \\ \frac{\sqrt{a^2 - (b - g)^2}}{\pi} - \frac{b - g}{2} + \\ + \frac{b - g}{\pi} \arcsin \frac{b - g}{a} & \text{при } |b - g| < a. \\ g - b & \text{при } b - g \leq -a \end{cases} \quad (34)$$

На периоде колебаний смещение капли происходит на расстояние, не превышающее  $|g - b|$ . Если характерный масштаб изменчивости радиуса сечения капилляра  $\eta$  велик по сравнению с  $|g - b|$ :  $\eta_0 \gg |g - b|$ , то выражение (34) можно использовать при анализе движения капли в капилляре переменного сечения.

*Движение капли в квазицилиндрическом капилляре (вязкий предел)*

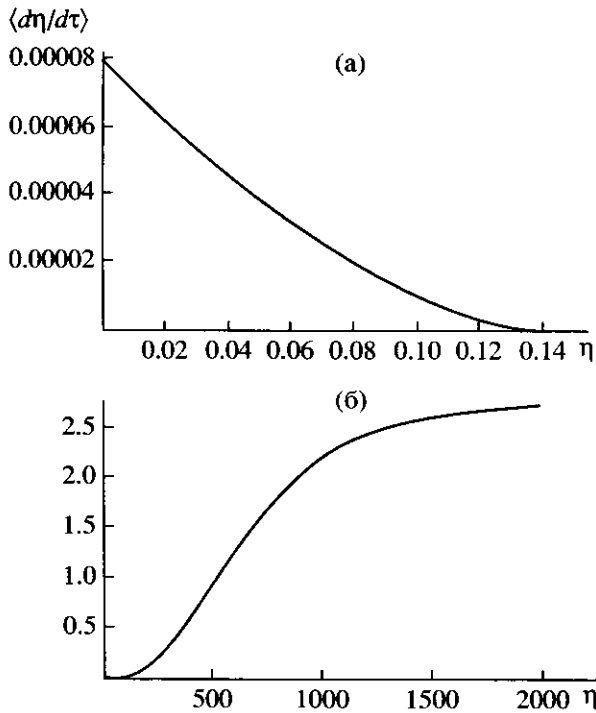
В реальных условиях капилляры имеют сложную форму, в частности, типичным является появление изгибов и отклонения от осевой симметрии. Мы будем здесь пренебрегать такими сложными искажениями формы капилляра и рассмотрим влияние простейшего искажения – зависимости радиуса сечения от продольной координаты. В этом случае движение капли описывается уравнением (31), и для средней скорости смещения можно использовать выражение (34), в котором надо заменить

$$b \rightarrow b \hat{R}^3(\eta)$$

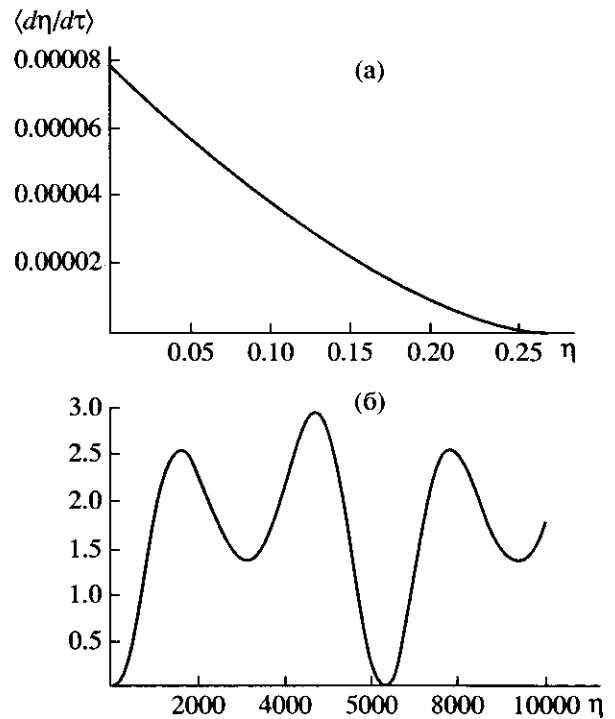
$$a \rightarrow a \hat{R}^2(\eta) \quad (35)$$

$$g \rightarrow g \hat{R}^2(\eta) + \gamma \frac{d\hat{R}}{d\eta}.$$

В выражение для эффективной средней силы, действующей на каплю, входит дополнительное слагаемое  $\gamma \frac{d\hat{R}}{d\eta}$ , обусловленное конусностью капилляра. Эта сила описывает эффект втягивания капле смачиваемых жидкостей в узкие капилляры и выталкивания капле несмачивающей жидкости в расширение капилляров. Исходя из этого ясно, что в капилляре переменного сечения для капле смачиваемой жидкости устойчивым положением равновесия будет область вблизи минимума радиуса капилляра, а для несмачиваемых – вблизи максимума. При этом капля может нахо-



**Рис. 7.** Зависимости средней скорости смещения капли в капилляре с переменным радиусом сечения  $\hat{R}(\eta) = \frac{1 + q/\text{ch}^2(\eta/\eta_0)}{1 + q}$ ,  $q = 0.5$ ,  $\eta_0 = 1000$ . (а) – для капли смачивающей жидкости, (б) – для капли несмачивающей жидкости.



**Рис. 8.** Зависимости средней скорости смещения капли в капилляре с переменным радиусом сечения  $\hat{R}(\eta) = \frac{1 + q\cos(\eta/\eta_0)}{1 + q}$ ,  $q = 0.5$ ,  $\eta_0 = 1000$ . (а) – для капли смачивающей жидкости, (б) – для капли несмачивающей жидкости.

даться вблизи положения равновесия и при наличии среднего градиента давления, если

$$b\hat{R}^3(\eta_e) > g\hat{R}^2(\eta_e),$$

где  $\eta_e$  – координата экстремума.

Допустим теперь, что капля находится вблизи экстремума, а внешняя сила соответствует порогу смещения. Если  $\hat{R}(\eta_e) = 1$  (задается выбором нормировки), то  $b = g$ . Движение капель смачивающей и несмачивающей жидкости под действием вибраций будет различным. В случае смачивающей капли  $\hat{R}(\eta)$  – вблизи минимума представляет собой растущую функцию  $\eta$ . При этом из (34), (35) видно, что движение капли происходит до тех пор, пока не начнет выполняться условие

$$(\hat{R}(\eta) - 1) - \frac{\gamma \frac{d\hat{R}}{d\eta}}{R^2(\eta)} \geq a. \tag{36}$$

Если вблизи положения равновесия условие (36) не выполняется, то капля начнет смещаться. При удалении от точки равновесия  $\hat{R}(\eta)$  растет (капля отклоняется от точки минимума  $\hat{R}(\eta)$ ), условие (36)

начинает выполняться, и происходит остановка капли.

В случае капль несмачивающей жидкости ее состояние равновесия находится вблизи максимума  $\hat{R}(\eta)$ . Если капля под действием вибрации начинает смещаться от положения равновесия, то условие (36) при меньших  $\hat{R}(\eta)$  выполняться не будет, и капля будет продолжать удаляться от точки равновесия. Таким образом, с помощью вибраций можно заземленную каплю несмачивающей жидкости, а капля смачивающей жидкости остается вблизи своего положения устойчивого равновесия. Примеры такого движения капель показаны на рис. 7 для капилляра с монотонным изменением радиуса поперечного сечения

$$\hat{R}(\eta) = \frac{1 + q/\cosh^2(\eta/\eta_0)}{1 + q}, \quad q = 0.5, \quad \eta_0 = 1000$$

и на рис. 8 для капилляра с периодическим изменением радиуса

$$\hat{R}(\eta) = \frac{1 + q\cos(\eta/\eta_0)}{1 + q}, \quad q = 0.5, \quad \eta_0 = 1000.$$

Из рис. 7а, 8а видно, что вибрация выталкивает каплю смачивающей жидкости из областей сужения капилляра; впоследствии капля останавливается на некотором расстоянии от начального положения. В случае несмачиваемых жидкостей (рис. 7б, 8б) под действием вибраций капля может бесконечно удаляться от положения равновесия. При этом в капилляре монотонного сечения движение монотонно, а в периодическом – осциллирующее.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ движения отдельных капель в пористой среде под действием низкочастотной вибрации. Предполагалось, что жидкость смачивает стенки пор. В то же время, как известно, нефть по отношению к большинству типов пород является несмачивающей жидкостью. В связи с этим необходимо отдельно оговорить те конкретные условия, когда рассмотренный выше механизм, действительно, может привести к увеличению темпа протекания нефти. Здесь необходимо указать на три возможные ситуации:

1. Нефть смешана с водой, так что по капиллярам движется суспензия. В отличие от самой нефти, она смачивает стенки пор. Таким образом, вибровоздействие увеличивает протекание капель суспензии, заземленных внутри пор.

2. Капли воды заполняют часть порового объема и препятствуют протеканию нефтяной фазы (или суспензии). В таком случае вибровоздействие приводит к прочищению пор.

3. При падении пластового давления на стенках капилляров могут осаждаться тяжелые фракции нефти, и поверхность коллектора становится смачиваемой.

Рассмотренный механизм движения капель под действием вибрации имеет пороговый характер (амплитуда звуковой волны должны превысить некоторое критическое значение). На первый взгляд, кажется, что из-за этого данный механизм будет проявляться только в случае мощного акустического воздействия на пласт. (Для акустических излучателей, погруженных в скважину, областью эффективного воздействия будет прискважинная зона.) Необходимо отметить, однако, что уровень порога в нашей модели оказывается тем меньше, чем больше (длиннее) капля. Большие капли могут начать движение и в случае достаточно слабого уровня вибровоздействия, при котором более мелкие капли еще не могут сдвинуться с места. Но если на пути больших капель будут лежать более мелкие, то они будут постепенно поглощаться ими и вовлекаться в движение. Движущаяся капля будет становиться все больше, а средняя скорость ее движения будет

расти. Такой сценарий массопереноса представляется вполне реалистичным. Во всяком случае, с нашей точки зрения, это наиболее эффективный из известных в настоящее время физический механизм, с помощью которого можно объяснить наблюдаемый в отдельных экспериментах рост протекания нефти при низкочастотном вибровоздействии на пласт.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 02-02-17089, 03-05-64993, НШ-1637.2003.2) и по программе президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов О.Л., Симкин Э.М., Чилингар Дж. Физические основы вибрационного и акустического воздействия на нефтегазовые пласты. М.: Мир, 2001.
2. Дыбленко В.П., Камалов Р.Н., Шарифуллин И.А., Туфанов И.А. Повышение продуктивности и реанимация скважин с применением виброволнового воздействия. М.: Недра, 2000.
3. Сургучев М.Л., Кузнецов О.Л., Симкин Э.М. Гидродинамическое, акустическое, тепловое циклические воздействия на нефтяные пласты. М.: Недра, 1975.
4. Вахитов Г.Г., Симкин Э.М. Использование физических полей для извлечения нефти из пластов. М.: Недра, 1985.
5. Beresnev I.A., Johnson P.A. Elastic-wave stimulation of oil production: A review of methods and results // *Geophysics*. 1994. V. 59. № 6. P. 1000–1017.
6. Горбачев Ю.И., Кузнецов О.Л., Рафиков Р.С., Печков А.А. Физические основы акустического метода воздействия на коллекторы // *Геофизика*. 1998. № 4. С. 5–9.
7. Biot M.A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated porous Solid // *JASA*. 1956. V. 28. P. 168–191.
8. Biot M.A. Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media // *JASA*. 1962. V. 34. № 9. P. 1254–1264.
9. Николаев А.В. Эффект сейсмических воздействий на залежи нефти и подземных вод // В сб. “Сейсмическое вибровоздействие на нефтяную залежь”. М., 1993. Изд. ОИФЗ РАН. С. 7–13.
10. Ряшенцев А.Н., Ряшенцев Н.П. Физические процессы и результаты промысловых испытаний управляемого сейсмического воздействия на нефтяные залежи // *Динамика сплошной среды*. Т. 112. Акустика неоднородных сред. Новосибирск: Изд-во ИГ СО РАН, 1997.
11. Боголюбов Б.Н., Лобанов В.Н., Бриллиант Л.С., Саинев И.А., Потапов Г.А. Интенсификация добычи нефти низкочастотным акустическим воздействием // *Нефтяное хозяйство*. 2000. № 9. С. 80–81.
12. Бриллиант Л.С., Боголюбов Б.Н., Цыкин И.В., Лобанов В.Н., Новиков В.Ф., Морозов В.Ю., Потапов Г.А., Рамазанов Д.Ш., Саинев И.А. Опыт-

- но-промышленные испытания мощного низкочастотного излучателя для интенсификации добычи нефти // Нефтяное хозяйство. 2000. № 9. С. 86.
13. Nonlinear Acoustics at the beginning of the 21-st Century edited by O.V. Rudenko and O.A. Sapozhnikov (Faculty of Physics, MSU, Moscow, 2002). V. 2. P. 1169–1264.
  14. Николаевский В.Н. Механизм вибровоздействия на нефтеотдачу месторождения и доминантные частоты // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 3. С. 570–575.
  15. Николаевский В.Н. Вибрации горных массивов и конечная нефтеотдача пласта // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 110–119.
  16. Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А. Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1345.
  17. Абрашкин А.А., Раевский М.А. Динамика неустойчивых смачивающих пленок и одиночных капель в капилляре под действием вибрации // Известия АН. Серия физическая. 2002. Т. 66. № 12. С. 1730–1736.
  18. Авербах В.С., Власов С.Н., Заславский Ю.М. Движение капли жидкости в капилляре под действием статического и акустического полей // Радиофизика. 2000. Т. XLIII. № 2. С. 155–161.
  19. Железный Б.В. Экспериментальное исследование динамического гистерезиса краевого угла // ДАН СССР. 1972. Т. 207. № 3. С. 647–650.
  20. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979.
  21. де Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. Вып. 4. С. 619–681.
  22. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
  23. Авербах В.С., Власов С.Н., Заславский Ю.М. Движение смачивающих стенку капилляра капель под действием вибрации // X Сессия Российского Акустического Общества. 2000. С. 91–94.
  24. Заславский Ю.М. Экспериментальное исследование движения капель жидкости в капилляре под действием вибрации // Акустический журнал. Т. 48. № 1. С. 56–60.
  25. Moffatt H.K. // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. P. 1–18.
  26. Воинов О.В. Краевые условия на движущейся линии контакта трех фаз в задачах для уравнений навье-Стокса при смачивании твердых тел // ДАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 627–629.
  27. Абрашкин А.А., Авербах В.С., Власов С.Н. Массоперенос жидкой фазы в частично насыщенной пористой среде под действием низкочастотных упругих колебаний // Известия вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46 (3). С. 235–244.